

חפיפת משולשים- מדריך למורה

נקודת המוצא של הפרק היא שהתלמידים רכשו כבר את הידע האינטואיטיבי בנוגע למשמעות של צורות חופפות- "צורות הן חופפות אם אפשר להניח את האחת על האחרת כך שתכסה אותה בדיוק". בפרק זה המיקוד הוא על **משולשים** חופפים, והמטרה היא להקנות לתלמידים כלים שבאמצעותם הם יכולים להחליט אם שני משולשים חופפים או שאינם חופפים, גם מבלי שיידרשו להניח אותם זה על זה. הדרך להשגת מטרה זו מבוססת על כך שהתלמידים חוקרים בכוחות עצמם, בגישה קדם-דדוקטיבית, את התנאים המספיקים לחפיפת משולשים. בפרק זה יכירו התלמידים את שלושת משפטי החפיפה הראשונים ז.צ.ז, ז.צ.ז, צ.צ.צ.

צלעות וזוויות במשולשים חופפים

פעילות 1 (עמ' 242): מטרתה של הפעילות היא להקנות את המושגים "צלעות מתאימות" ו"זוויות מתאימות" במשולשים חופפים.

פעילות 2 (עמ' 243): מטרתה של הפעילות היא לתרגל את המושגים "צלעות מתאימות" ו"זוויות מתאימות".

הערה: הניסיון מראה שלתלמידים רבים יש קושי בפירוק צורה מורכבת לרכיביה (במקרה זה- פירוק דלתון לשני משולשים), ולכן בפרק הנוכחי נציג מספר בעיות אשר באופן הדרגתי תסייענה לתלמידים להתמודד עם קושי זה.

תרגילים (עמ' 243-245):

מטרתו של תרגיל 1 (ולאחר מכן גם בתרגילים 2 ו-4) היא להקנות לתלמידים ידע בנוגע לקשר הקיים בין הצלעות המתאימות במשולשים חופפים לבין שוויון הזוויות המתאימות, המונחות מול הצלעות המתאימות, ולהיפך.

בסיכום תרגיל 1 מוצגת תזכורת בנוגע לדרך המקובלת לסימון קטעים שווים וזוויות שוות.

בתרגילים 3-4 על התלמידים להיעזר, ברוח הספירליות, בידע שרכשו בפרקים קודמים.

בתרגיל 3 על התלמידים למצוא את הזוויות המתאימות, ובסעיף ב של התרגיל עליהם להיעזר בידע שלהם בנוגע לסכום זוויות במשולש.

בסעיף א של תרגיל 5 על התלמידים להשתמש בידע שלהם בנוגע לשוויון הצלעות הנגדיות במלבן.

בסעיפים ב ו-ג עליהם להיעזר בידע שלהם בנוגע לכך שאלכסון המלבן מחלק את המלבן לשני משולשים ישרי זווית חופפים, תוך שימוש בעובדה ש"משולשים ישרי-זווית, שהניצבים שלהם שווים אחד לאחד, הם חופפים".

תרגיל 6 הוא בעל אופי לבעיה המוצגת בפעילות 2, למעט העובדה שעל התלמידים למדוד אורכים ומידות של זוויות.
בתרגיל 7 קיימת שוב התייחסות לצורך לפרק צורה לרכיביה ולשימוש בידע על סכום זוויות במשולש.

פעילות 3 (עמ' 245): מטרת הפעילות היא להראות שאם שני משולשים חופפים, אז השטחים שלהם שווים, אבל הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון. בפעילות זו נוכחים התלמידים לדעת שלמרות ששטחו של המשולש הכחול שווה לשטחם של המשולשים (החופפים) הירוק והאדום, הוא איננו חופף לשני משולשים אלה.

פעילות 4 (עמ' 246): מטרת הפעילות היא להראות שאם שני משולשים חופפים, אז ההיקפים שלהם שווים, אבל הכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון. בפעילות זו נוכחים התלמידים לדעת שלמרות שהיקפו של המשולש הירוק שווה להיקפם של המשולשים (החופפים) הירוק והאדום, הוא איננו חופף לשני משולשים אלה.

בסיום פעילות זו מוצג הסיכום של המסקנות העולות מפעילויות 3 ו-4.
מטרתו של תרגיל 8 (עמ' 246) הוא להזכיר לתלמידים שבמשולש ישר זווית היתר גדול מכל אחד מהניצבים. שימוש במידע זה יסייע לתלמידים לקבוע ששני המשולשים אינם חופפים. במשולש ABC, AC הוא היתר, ולכן במשולש זה AC היא הצלע הארוכה ביותר. במשולש ACD, AC הוא ניצב, ולכן קיימת צלע ארוכה יותר מהצלע AC. לאור זאת, לא יתכן ששני המשולשים חופפים.
תרגיל זה מוצג כתרגיל לתלמידים מתקדמים, אולם מומלץ לאפשר לכל התלמידים להתמודד עימו, תוך כדי פיתוח היכולת של התלמידים להשתמש בשפה מתמטית לצורך הנמקה.

איך מקובל לרשום חפיפה של משולשים? (עמ' 246)

מומלץ להתעכב על הדרך הנכונה לרישום חפיפת משולשים, תוך הקפדה על התאמה בין הקודקודים. בנוסף, חשוב להראות לתלמידים כיצד רישום בדרך זו מאפשר להם לזהות בקלות את הצלעות המתאימות ואת הזוויות המתאימות.

יחד עם זאת, יש להגיש בפני התלמידים שמותר לומר "משולש ABC חופף למשולש DEF" גם אם חפיפה זו אינה בהתאמה, כל זמן שלא רושמים את החפיפה בעזרת הסימון המקובל, \cong .

בדוגמה שבעמוד 247 מוצגת הדרך שבה יש לרשום את החפיפה בהתאמה. יש לשים לב לכך שאין חשיבות לסדר רישום הקודקודים, כל עוד נשמרת ההתאמה. אפשר להראות לתלמידים שקיימות 6 אפשרויות לרישום "שמו" של משולש מסוים: PRQ, PQR, RPQ, RQP, QPR, QRP.

בתרגיל 9 התלמידים צריכים להיעזר בסימונים המצביעים על הצלעות המתאימות ועל הזוויות המתאימות, על מנת לרשום את חפיפת המשולשים בהתאמה.
 תרגיל 10 (עמ' 247) מיועד לתלמידים מתקדמים, ומטרתו לתרגל מציאת צלעות מתאימות וזוויות מתאימות על סמך הרשום המקובל של חפיפת משולשים, ולהיפך.

משפטי חפיפה (עמ' 248)

בטרם יוצגו לתלמידים משפטי החפיפה, מומלץ לקיים עימם דיון בנוגע למידע הנדרש על מנת לקבוע האם שני משולשים חופפים. מטרתו של הדיון היא לפתח אצל התלמידים אינטואיציה ראשונית לצורך התמודדות עם תנאים מספיקים לחפיפת משולשים (שלאחר מכן יבואו לידי ביטוי בשלושת משפטי החפיפה הראשונים). מומלץ לעודד את התלמידים לעשות שימוש בשפה מתמטית מדויקת, תוך חזרה על המושגים שנלמדו בפרק זה.

בהמשך מומלץ לדון עם התלמידים במשמעות של "משפט מתמטי", וההבדל בינו לבין "משפט" בהקשר של תחביר או בית משפט. לדוגמא: בבית משפט קיים הליך הנקרא "משפט". במסגרת הליך זה מוצגות בפני השופטים תביעות כלשהן, והם אמורים לתת פסקי דין שקובעים האם הצד הנתבע אשם או זכאי. כאשר לומדים דקדוק או לשון, לומדים שקיים מבנה תחבירי הנקרא "משפט". למבנה זה יש כללים וחוקים השייכים לתחום התחביר.

כמו כן, כדאי לחזור על משפטים מתמטיים שנלמדו בעבר, למרות שלא כונו בשם "משפט", על מנת לחדד את הבנת המשמעות של משפט מתמטי.

לצורך גילוי התנאים המספיקים לחפיפת משולשים עבור שלושת משפטי החפיפה יש להכין מראש, במידת האפשר, אמצעי עזר כלשהו (רצועות נייר צבועות, שקפים צבועים, רצועות פלסטיק באורכים שונים, וכד', וכן גזרות של זוויות העשויות מנייר או משקפים), כמפורט בעמ' 249.

גילוי שלושת משפטי החפיפה מתבצע באופן עצמאי ומדורג, בגישה קדם דדוקטיבית, ללא הוכחות פורמליות.

משפט חפיפה צ.ז.צ (עמ' 249-251)

מטרתה של פעילות 1 היא לאפשר לתלמיד לראות שאם ידוע שבמשולש אחד שתיים מהצלעות שוות בהתאמה לשתיים מהצלעות במשולש שני המשולשים אינם בהכרח חופפים. כלומר, עצם קיומן של שתי השוות בהתאמה בשני משולשים אינו מהווה תנאי מספיק לחפיפת המשולשים.

בפעילות 2 התלמידים יגלו שתוספת של זווית שווה בין שתי הצלעות השוות בהתאמה בהכרח גורמת לכך ששני המשולשים יהיו חופפים. במילים אחרות, אם ידוע שבמשולש אחד שתי צלעות והזווית שביניהן שוות בהתאמה לשתי צלעות והזווית שביניהן במשולש שני, המשולשים בהכרח חופפים. לא יתכן ששני משולשים המקיימים תנאי זה לא יהיו חופפים. זהו משפט החפיפה הראשון, צלע-זווית-צלע. לסיכום הפעילות מוצגות דוגמאות שמהן ניתן לראות: א. משולשים שיש להם צלע אחת שווה, לא בטוח שהם חופפים. ב. משולשים בהם שתי צלעות של משולש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות של המשולש השני, לא בטוח חופפים. ג. משולשים שיש להם צלע אחת שווה וזווית אחת שווה, לא בטוח חופפים.

מטרתה של פעילות 3 היא להדגיש שאם ידוע שלשני משולשים יש שתי צלעות שוות וזוויות אחת שווה, עדיין אין זה תנאי מספיק לכך שהמשולשים חופפים. הזווית השווה צריכה להיות בין שתי הצלעות השוות, בהתאמה.

תרגילים (עמ' 253-256):

בתרגילים 1-2 מודגשת החשיבות של מיקומה של הזווית ביחס לצלעות המתאימות, על מנת להבטיח חפיפה של שני המשולשים. בתרגיל 3 על התלמידים להיעזר בתכונה של זוויות קודקודיות על מנת לקבוע את חפיפת המשולשים. לאחר מכן עליהם להסיק לגבי שוויון הצלעות המתאימות. בתרגיל 4 על התלמידים להתייחס לשלושה תנאים- היצור הוא פרפר (יצור ו אינו עונה על התנאי), וגם כנפי הפרפרים חייבות להיות בצורת משולש (יצור ב אינו עונה על התנאי), וגם כנפי הפרפרים חייבות להיות חופפות. נשאר לבדוק האם יצורים א, ג, ד, ה מתקיימים את התנאי השלישי. לגבי יצורים א ו-ה, ניתן לקבוע בוודאות שהם מקיימים את התנאי. לגבי יצור ג, לא ניתן לקבוע האם הוא מקיים את התנאי השלישי או לא, שכן אין מספיק מידע. לגבי יצור ד- ניתן לקבוע בוודאות שאינו מקיים את התנאי. חשוב לשים לב להבדלים שבין שלושת המקרים (ניתן לקבוע בוודאות שכן, לא ניתן לדעת, ניתן לקבוע בוודאות שלא), ולדון על כך עם התלמידים.

תרגיל 5 מהווה הזדמנות לעסוק בתכונות של משולש שווה שוקיים. בעזרת שימוש במשפט החפיפה צ.ז.צ יגלו התלמידים שחוצה זווית הראש הוא גם גובה לבסיס וגם תיכון לבסיס. בתרגיל זה צריך גם להיעזר בידע קודם בנוגע לסכום זוויות צמודות, כדי שניתן יהיה להשיב על סעיף ג של התרגיל.

בתרגיל 6 מומלץ להתייחס להבדל שבין- שניתן לקבוע בוודאות ששני המשולשים אינם חופפים, לא ניתן לדעת האם המשולשים חופפים או שאינם חופפים, וניתן לקבוע בוודאות ששני המשולשים אינם חופפים.

תרגיל 7 הוא הכללה של תרגיל 5.

תרגיל 9 הוא חזרה על ידע קודם- משולשים ישרי זווית השווים באורכי ניצביהם הם משולשים חופפים. התרגיל מאפשר גם לפתח מיומנויות של ראייה מרחבית על ידי תרגום סיטואציה מרחבית לייצוג דו- מימדי.

בתרגילים 10-11 על התלמידים להיעזר בידע קודם שלהם על חיבור קטעים שווים לקטעים שווים, וכן לתרגל פירוק צורה למרכיביה.

בתרגיל 12 על התלמידים לתרגם סיטואציה מציאותית לתנאים על חפיפת משולשים.

משפט חפיפה ז.צ.ז (עמ' 259-257)

מטרתה של פעילות 1 היא לאפשר לתלמיד לראות שאם במשולש אחד צלע אחת וזווית אחת שוות בהתאמה לצלע אחת וזווית אחת של משולש שני המשולשים אינם בהכרח חופפים. כלומר, שוויונות אלה אינם מהווים תנאי מספיק לחפיפת המשולשים.

בפעילות 2 התלמידים יגלו שתוספת של זווית שווה, היוצרת מצב שבו במשולש אחד שתי זוויות והצלע שביניהן שוות בהתאמה לשתי זוויות והצלע שביניהן, מביאה לידי כך שזהו תנאי מספיק לחפיפה של שני משולשים. כלומר, לא יתכן ששני משולשים המקיימים תנאי זה לא יהיו חופפים. זהו משפט החפיפה השני זווית-צלע-זווית.

מטרתה של פעילות 3 היא להדגיש שאם ידוע שלשני משולשים יש שתי זוויות שוות וצלע אחת שווה, עדיין אין זה תנאי מספיק לכך שהמשולשים חופפים. הצלע השווה צריכה להיות בין שתי הזוויות השוות, בהתאמה.

תרגילים (עמ' 262-260):

בתרגילים 1-2 מודגשת החשיבות של מיקומה של הצלע השווה ביחס לזוויות המתאימות, על מנת להבטיח חפיפה של שני המשולשים.

בתרגיל 3 על התלמידים להיעזר בפירוק צורה למרכיביה.

נתוני המשולש בתרגיל 4 מאפשרים לקבוע חפיפה של שני משולשים על בסיס אחד משני משפטי החפיפה שכבר נלמד- צ.צ.ז או ז.צ.ז. על התלמידים להיעזר במה שידוע להם על סכום זוויות במשולש.

בתרגיל 5 יש להיעזר במשמעות של קטעים החוצים זה את זה.

בתרגיל 6 יש לפרק את הצורה לשני משולשים, לסמן גדלים שווים, ולהוכיח את החפיפה.

משפט חפיפה ז.צ.ז (עמ' 262-263)

מטרתה של פעילות 1 היא לאפשר לתלמיד לראות ששלושה קטעים קובעים משולש יחיד, ולכן אם ידוע שלוש צלעות במשולש אחד שוות בהתאמה לשלוש צלעות במשולש שני אז המשולשים חופפים.

סעיף ו של הפעילות מזמן חזרה על הנושא של אי-שיוויון המשולש. מומלץ לדון עם התלמידים באפשרויות השונות לבחירה של שלוש צלעות שלא ניתן ליצור באמצעותן משולש.

תרגילים (עמ' 263-264):

תרגיל 1 מדגיש את העובדה שבעזרת שלוש צלעות ניתן לבנות משולש אחד בלבד. מומלץ לעסוק תחילה בשאלה האם בעזרת שלוש צלעות אלה ניתן בכלל לבנות משולש. בתרגיל 2 יש חזרה על התכונה של תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים. בדרך זו ניתן להראות לתלמידים שתכונה זו ניתנת להוכחה בדרכים שונות, בהתאם למידע שנתון לנו (ראה גם תרגיל 5 בעמ' 254).

תרגיל 3 מזמן יצירת שני משולשים במרובע, בעזרת סרטוט אלכסוני המרובע. את עפיון 1 ניתן לחלק לשני משולשים חופפים, והוא עונה גם על הדרישות של סעיף ב. עבור עפיון 2 על התלמידים להיעזר בידע שלהם על סכום זוויות במלבן. גם עפיון זה עומד בדרישות של סעיף ב.

עפיון 3 אינו עומד בדרישות התחרות.

בעפיון 4 ניתן להעביר שני אלכסונים, ולהראות שהוא מקיים את הדרישות של סעיף ב. בעפיון 5 יש להעביר את האלכסון הפנימי למרובע, ולהראות שהוא עומד בדרישות התחרות. עבור עפיון 6 על התלמידים להיעזר בידע שלהם על ריבוע, ולהראות שעפיון זה עומד בדרישות של סעיף ב.

בשאלה 4 יש להיעזר בידע הנוגע לשוויון הצלעות במשולש שווה צלעות, ולקשר בין תכונה זו לבין הידע הנוגע למציאת היקף של משולש.

בעמ' 265 מוצג סיכום של שלושת משפטי החפיפה.

בהזדמנו זו כדאי גם לחזור על הדברים הבאים:

לא תמיד ניתן להבטיח חפיפת משולשים על סמך מראה עיניים. לעיתים משולשים נראים חופפים בסרטוט, למרות שאינם חופפים על פי הנתונים. אנחנו יכולים להסתמך רק על מידע (מספרי או אחר) אשר יבטיח חפיפה.

ולהיפך – גם אם משולשים אינם נראים חופפים בסרטוט, עדיין אין זה אומר שהם אכן אינם חופפים. נוכל לומר בבטחה שהם אינם חופפים רק אם יהיה ברשותנו מידע מתאים שיכול לסתור את החפיפה.

כדי לנמק מדוע שני המשולשים חופפים, מוכרחים להשתמש בכל התנאים המבטיחים חפיפה, כלומר- באחד ממשפטי החפיפה עליהם למדנו. רישום החפיפה בהתאמה מאפשר לדעת מיהן הצלעות המתאימות במשולשים החופפים, ומיהן הזוויות המתאימות.

תרגילים (עמ' 270-266):

בתרגילים אלה יש להשתמש בשלושת משפטי החפיפה שנלמדו.

בתרגיל 5 – משולש א חופף למשולש 1 על סמך משפט צ.ז.צ. (להדגיש את ההבדל בין משולש 1 לבין משולש 5). משולש ב חופף למשולש 3. ניתן להראות זאת על סמך כל אחד ממשפטי החפיפה, לאחר שמשלימים את הנתונים החסרים במשולשים שווי הצלעות. משולש ג חופף למשולש 6 על מסך משפט צ.ז.ז (יש להשלים את הזווית החסרה במשולש 6 בעזרת הידע על סכום זוויות במשולש). משולש ד חופף למשולש 4, על סמך משפט חפיפה צ.ז.צ (להדגיש את ההבדל בין משולש 4 לבין משולש 2). בתרגיל 6 על התלמידים לקבוע חפיפה של משולשים בעזרת אחד ממשפטי החפיפה, בהתאם למידע הנתון בנוגע לשוויון גדלים בשני המשולשים.

בתרגיל 7 על התלמידים להיעזר במשפט צ.ז.צ, ובסעיף ד לגלות את התכונה של קטע אמצעים כמקום גיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מקצות הקטע (AB) שווה.

בתרגיל 8 התלמידים צריכים להיעזר בידע הקודם שלהם על תכונות של ישרים מקבילים- המרחק הקבוע ביניהם והמשמעות של מרחק.

תרגילים 9-11 מיועדים למתקדמים. לצורך קביעת החפיפה בכל אחד מהמקרים מומלץ לפרק כל צורה למרכיביה, ולסרטט כל משולש בנפרד.

בתרגיל 12 בנוסף לשימוש במשפט צ.ז.צ. יש להשתמש בידע קודם על תכונות המלבן, חישוב שטח של מלבן ושטח של משולש ישר זווית.

מטרתו של תרגיל 13 היא לאפשר לתלמידים לגלות שאם 4 צלעות של מרובע אחד שוות בהתאמה ל- 4 צלעות של מרובע שני, אז המרובעים לא בהכרח חופפים. יחד עם זאת, עם כאן עיסוק במציאת התנאים המספיקים לחפיפה של שני מרובעים.

תרגיל 14 מסייע לפיתוח מיומנויות של ראייה מרחבית על ידי תרגום סיטואציה מרחבית לייצוג דו-מימדי. בתרגיל יש גם חזרה על אחוזים.