הקשר בין שתי פונקציות קוויות לבין משוואה קווית – מדריך למורה

פתרון משוואות בדרך גרפית ובדרך אלגברית

בפרקים קודמים ראו התלמידים כיצד למצוא נקודת חיתוך של גרפים של שתי פונקציות בעזרת הסרטוט של הגרפים שלהן. מטרתה של **פעילות 1** היא להציג בפני התלמידים את הדרך למציאת נקודת החיתוך של שתי פונקציות קוויות באופן אלגברי, ולא רק על סמך התבוננות בגרפים שלהם, תוך התייחסות לקשר שבין שתי הדרכים.

סעיף א של הפעילות מהווה תזכורת- איך מתאימים בין גרף של פונקציה לבין התיאור האלגברי שלה.

בסעיף ב יש להתייחס לנקודה A באופן הבא: הנקודה A נמצאת על כל אחד מהגרפים, לכן הנקודה A היא נקודת החיתוך של שני הגרפים. התייחסות זו לנקודה A מובילה באופן טבעי לכך ששיעור ה-x של הנקודה A הוא פתרון המשוואה המופיעה בסעיף ג.

בסיכום הפעילות מוצג המינוח שבו נשתמש במהלך הפרק:

אומרים שאת המשוואה $5x – 4 = -3x + 12$ אפשר לבנות משתי הפונקציות (1) ו- (2).

תרגילים 1,2- פתרונות והסברים

מטרתם של תרגילים 1,2 היא לחזק את ההבנה בנוגע לקשר שבין פתרון אלגברי של המשוואה ממנה בנויות שתי פונקציות קוויות, לבין שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הגרפים של שתי הפונקציות הללו.

תרגיל 1. פונקציה (3) מתאימה לגרף ג, פונקציה (4) מתאימה לגרף ד. הפתרון: $x = 1$.

תרגיל 2. פונקציה (5) מתאימה לגרף ו, פונקציה (6) מתאימה לגרף ה. הפתרון $x = 3$.

מטרתה של **פעילות 2** היא לסכם את הממצאים מתוך פעילות 1 ומתוך תרגילים 1,2, ולאפשר לתלמידים לגלות את הקשר הבא: שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הגרפים של שתי פונקציות הוא הפתרון של המשוואה הבנויה מהן.

מטרתה של **פעילות 3** היא להציג את הרעיון של "הליכה בכיוון הפוך". עד כה ראינו שאם נתונות שתי פונקציות קוויות אפשר למצוא את שיעור ה-x של נקודת החתוך שלהן באמצעות פתרון המשוואה המתאימה, אבל אפשר גם להיפך: אם נתונה משוואה קווית, אפשר להתייחס לכל אחד מהאגפים שלה כאל משוואה של פונקציה קווית. את המשוואה ניתן לפתור בעזרת הסרטוט של הגרפים של שתי הפונקציות הקוויות המתקבלות, ומציאת שיעור ה-x של נקודת החיתוך שלהן באופן גרפי.

בעזרת **תרגילים 3,4** התלמידים מחזקים את ההבנה שלהם בהקשר של הרעיון המופיע בפעילות 2.

תרגיל 3. פתרון המשוואה הוא $x=2$.

תרגיל 4. פתרון המשוואה הוא $x=2$.

פתרון האתנחתא: שמים בכוס אחת מספר אי-זוגי של מטבעות (למשל- 5 מטבעות). בכוס שנייה שמים מספר זוגי של מטבעות (למשל- 4 מטבעות), ולתוכה מכניסים כוס שבה מטבע אחת. כך בכל כוס יש מספר אי-זוגי של מטבעות.

עד כה התלמידים ראו שתי דרכים אפשריות למציאת שיעור ה-x של נקודת החתוך של שתי פונקציות קוויות- בעזרת הסרטוט של הגרפים של שתי הפונקציות, ובעזרת פתרון המשוואה הקווית המתאימה. אולם תלמידים יכולים לשאול, ובצדק, מדוע הם זקוקים לפתרון המשוואה המתאימה, אם הם יכולים למצוא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך בכלים גרפיים בלבד. מטרתה של **פעילות 4** היא לענות על שאלה זו: לא תמיד אפשר למצוא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של גרפים של שתי פונקציות באופן מדוייק. מצב כזה קורה כאשר שיעור ה-x איננו מספר שלם. במקרה כזה, רק הפתרון של המשוואה המתאימה יכול לתת לנו את התוצאה האמיתית.

בסעיף א של פעילות 4 התלמידים יווכחו לדעת שלא ניתן למצוא את שיעור ה-x באופן ודאי. פתרון המשוואה אותה יש לבנות בסעיף ב הוא $x=1.5$. לכן המסקנה היא שבמקרה כזה עדיף להיעזר בפתרון המשוואה הבנוייה משתי הפונקציות.

תרגילים 5-12- פתרונות והסברים

תרגיל 5. בסעיף א, כאשר התלמידים מסרטטים את הגרפים של שתי הפונקציות הם עדיין לא יודעים ששיעור ה-x של נקודת החיתוך של הגרפים הוא מספר לא שלם. לאחר הסרטוט יווכחו שקיים קושי למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים באופן מדויק. בסעיף ב, פתרון המשוואה הוא $x=1.5$, ולכן עדיף לפתור את המשוואה הבנוייה משתי הפונקציות בכלים אלגבריים ולא בכלים גרפיים.

תרגיל 6. מתוך הסרטוט של הגרפים של שתי הפונקציות ניתן לראות ששיעור ה-x של נקודת החיתוך שלהן איננו מספר שלם. לכן, עדיף לפתור את המשוואה בכלים אלגבריים.

לאחר פתרון שני התרגילים מומלץ להתייחס שוב לסיכום הבא:

משתי פונקציות קוויות אפשר לבנות משוואה שבאמצעותה מוצאים את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הגרפים שלהן.

לפעמים קשה למצוא באופן מדויק את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של הגרפים מתוך הסרטוט, כי שיעור ה- x הוא מספר לא שלם. במקרה כזה עדיף לפתור את המשוואה שבנויה משתי הפונקציות.

תרגיל 7. תרגיל זה מיועד לתלמידים שעדיין זקוקים לחזרה על המשמעות של בנית משוואה משתי פונקציות, ועל הקשר שבין הפתרון האלגברי לבין הפתרון הגרפי.
תרגיל 8. פתרון המשוואה הוא x=1. בשתי הדרכים ניתן לקבל פתרון זה.
תרגיל 9. פתרון המשוואה הוא x=-2.5. לכן, עדיף לפתור את המשוואה הבנויה משתי הפונקציות בכלים אלגבריים.

תרגיל 10. פתרון המשוואה הוא x=3.25. לכן, עדיף לפתור את המשוואה הבנויה משתי הפונקציות בכלים אלגבריים.

תרגיל 11. פונקציה (1) מתאימה לגרף א. פונקציה (2) מתאימה לגרף ג. פונקציה (3) מתאימה לגרף ב. את שיעורי נקודת החיתוך של כל שניים מבין שלושת הגרפים ניתן למצוא בכלים גרפיים, היות ושיעורים אלה הם מספרים שלמים: A(-1,6); B(1,6);C(0,9). בהמשך התרגיל התלמידים יתאימו בין הפתרון הגרפי לבין הפתרון האלגברי עבור כל זוג של פונקציות.

פתרון האתנחתא: סיגל צריכה לפרק את אחת השרשראות. בשרשרת יש 3 חוליות, ובעזרתן היא תחבר את ארבע השרשראות הנותרות.

תרגיל 12. תרגיל זה מיועד לתלמידים מתקדמים. התרגיל דורש סרטוט של שלושה גרפים, מציאת שיעורי נקודת החיתוך של כל זוג גרפים בכלים גרפיים, ומציאת שיעור ה-x של נקודת החיתוך בכלים אלגבריים. בעזרת הסרטוט של שלושת הגרפים ומציאת נקודות החיתוך שלהם, התלמידים יוכלו לחשב את שטחו של המשולש המתקבל (במקרה הצורך יש להזכיר להם את הנוסחה לחישוב שטח משולש, ולסייע להם לזהות את הצלע המתאימה לצרכי החישוב ואת הגובה לצלע זו).
בסעיף ב של הפעילות התלמידים נדרשים, בנוסף, גם להיעזר בחוק הפילוג.

בעבר כבר נפגשו התלמידים עם משוואות קוויות שאין להן פתרון. מטרתה של **פעילות 5** היא להציג בפני התלמידים את המשמעות הגרפית שיש לכך, בדומה לקשר שבין הייצוג גרפי לבין הייצוג אלגברי שבו עסקו בפעילויות הקודמות של פרק זה. התלמידים אמורים להסיק שכאשר למשוואה קווית אין פתרון, המשמעות היא שהגרפים של הפונקציות מהן בנויה המשוואה הם ישרים מקבילים (ישרים שאין להם נקודת חיתוך).

בפעילויות 6 התלמידים ימשיכו לעסוק ברעיון זה, כאשר פתרון המשוואה דורש כינוס איברים דומים.
עם תלמידים מתקדמים ניתן לדון בכך שאם בשתי פונקציות קוויות (לאחר כינוס איברים דומים) המקדם של x שווה, אז הגרפים של שתי הפונקציות הללו הם ישרים מקבילים, ולמשוואה הבנוייה משתי הפונקציות הללו אין פתרון.

ב**פעילויות 7 ו-8** מוצג הרעיון של איסוף פתרונות למשוואה קווית, כאשר לאחר כינוס איברים דומים בכל אחד מאגפי המשוואה מתקבל למעשה אותו ביטוי אלגברי, או במילים אחרות- מתקבלת אותה הפונקציה. לכן, למעשה, שתי הפונקציות מתלכדות, ויש להן אינסוף נקודות חיתוך (או אינסוף פתרונות).

פתרון האתנחתא: כדי להקל על התלמידים את פתרון הבעיה, נפתור מקרה פשוט יותר. נניח שבכוס היה חיידק אחד שבכל דקה מתחלק לשני חיידקים, הממלאים את הכוס בתוך 5 דקות. כמה חיידקים ממלאים את הכוס? אחרי 1 דקה היו בכוס 2 חיידקים. אחרי 2 דקות היו בכוס 4 חיידקים. אחרי 3 דקות היו בכוס 8 חיידקים. אחרי 4 דקות היו בכוס 16 חיידקים. אחרי 5 דקות היו בכוס 32 חיידקים. כלומר, יש צורך ב- 32 חיידקים כדי למלא את הכוס.
כמה זמן היה לוקח לשני חיידקים למלא בדרך זו את הכוס? אחרי 1 דקה היו בכוס 4 חיידקים. אחרי 2 דקות היו בכוס 8 חיידקים. אחרי 3 דקות היו בכוס 16 חיידקים. אחרי 4 דקות היו בכוס 32 חיידקים, והכוס מלאה.
כלומר, לשני חיידקים נדרשה דקה אחת פחות כדי למלא את הכוס. כפי שניתן לראות, בכל דקה מספר החיידקים מוכפל. לכן, במקרה של הבעיה הנתונה באתנחתא, שנייה אחת פחות לפני תום השעה הכוס שבה הונחו בטעות 2 חיידקים, התמלאה. אילו היו בכוס בהתחלה 4 חיידקים, היא הייתה מתמלאת 3 שניות לפני תום השעה.

מטרתו של **תרגיל 13** היא לסכם את שלושת המקרים האפשריים עבור פתרון של משוואה קווית: פתרון יחיד, אין פתרון (0 פתרונות), או אינסוף פתרונות, תוך התייחסות למשמעות הגרפית של כל אחד מהמקרים. בתרגיל זה התלמידים נדרשים גם לחזור על חוק הפילוג ועל כינוס איברים דומים.

הפתרונות:

	אין נקודות חיתוך	נקודת חיתוך אחת	כל הנקודות (אינסוף) מתלכדות
המשוואה	ז	א (x=6) , ב (x=7) , ד (x=7) ה (x=0) , ח ($x = 4\frac{1}{3}$) , ט (x=54)	ג, ו

לאחר סיום פתרון התרגיל ממולץ לסכם את כל מה שנלמד עד כה בפרק זה:
1. כאשר פותרים משוואה הבנויה משתי פונקציות קוויות יכול להתקבל פתרון אחד, אפס פתרונות או אינסוף פתרונות. 2. מספר נקודות החיתוך של שני גרפים של פונקציות קוויות, הוא מספר הפתרונות של המשוואה הבנויה משתי הפונקציות הללו.
בהמשך יש דוגמאות (אלגבריות וגרפיות) עבור על אחד מהמקרים האפשריים.

פתרון האתנחתא:

א. בוחרים שתי מטבעות ומניחים אותן על שתי כפות המאזניים. אם המאזנים מגיעים למצב מאוזן, אז ברור שלשתי המטבעות אותו המשקל, ולכן המטבע השלישית קלה יותר. אם המאזניים אינם מגיעים למצב מאוזן, בוחרים את המטבע הקלה מבין השתיים.

ב. מחלקים את 9 המטבעות לשלש קבוצות בנות שלוש מטבעות כל אחת. על כל אחת מכפות המאזניים מניחים שלוש מטבעות. אם המאזניים מאוזנים, המטבע הקלה נמצאת בקבוצה השלישית. אם המאזניים אינם מאוזנים, בוחרים את הקבוצה בת שלוש המטבעות, בה נמצאת המטבע הקלה. את המטבע הקלה עצמה מוצאים כפי שמצאנו בסעיף א.

תרגיל 14. בתרגיל זה מוצגת משימה שיש לה משמעות בחיי היום-יום. מעבר לתירגול הידע שנרכש עד כה בפרק זה, על התלמידים לקשר בין התוכן הסיפורי לבין התיאור הגרפי שלו.
בסעיף א נדרשים התלמידים לקשר בין המשמעות של המקדם החופשי בשתי הפונקציות המתאימות לבין משמעותו בהקשר של הבעיה. עלות השימוש בחדר הכושר היא 125 ₪ לחודש, ועלות השימוש בבריכה היא 320 ₪ לחודש.
בסעיף ב הפתרון הוא בכלים אלגבריים (אירית משלמת 50 ₪ לחודש, ודלית משלמת 100 ₪ לחודש, ולכן דלית משלמת בכל חודש 50 ₪ יותר מאירית). לצורך פתרון הבעיה, על התלמידים להציב בפונקציה המתאימה לבניין א את הערך המתאים של x. בסעיף ג הפתרון הוא בכלים גרפיים (עבור תלמידים מתקדמים). התלמידים צריכים לשים לב להבדלים בין שיעור ה-y של כל אחת מהנקודות המתאימות על הגרף האדום.

סעיפים ד ו-ה דומים במשמעותם לסעיפים ב ו-ג. רן משלם בכל חודש 25 ₪ יותר מדן.

בסעיף ו התלמידים צריכים להציב בפונקציה המתאימה לבנין ב את הערך המתאים עבור y, ולמצוא את x. משפחת ישראלי מתגוררת בקומה חמישית (x=5). בסעיף ז, לצורך מציאת הפתרון בכלים גרפיים, התלמידים צריכים לסרטט את הישר y=250, ולמצוא את שיעור ה-x של נקודת החיתוך של ישר זה עם הגרף הכחול.

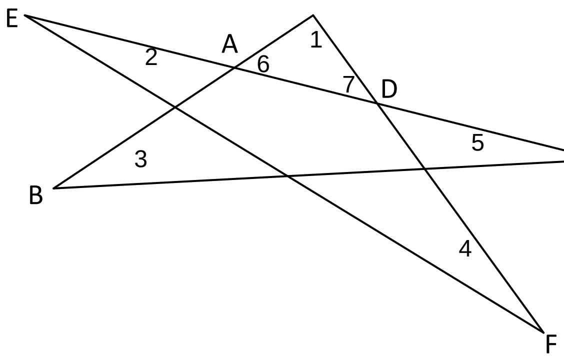
בסעיף ח, כדי למצוא את הפתרון בדרך גרפית התלמידים צריכים להבין שמדובר בנקודת החיתוך של הגרף האדום והגרף הכחול. המשפחות גרות בקומה חמישית (x=5). בסעיף ט, כדי למצוא את הסכום אותו משלמת כל משפחה מדי חודש, אפשר למצוא "בערך" את שיעור ה-y של נקודת החיתוך בעזרת הסרטוט. היות ומתקבל מספר שאינו שלם, עדיף להציב את x=5 באחת מהפונקציות המתאימות, ולקבל שסכום התשלום הוא 250 ₪. מומלץ להציב את x=5 גם בפונקציה השנייה, כדי לחזק את התובנה שאין זה משנה באיזו מהפונקציות נציב את שיעור ה-x.

סעיפים י ו-יא דומים במשמעותם לסעיפים ז ו-ח. המשפחות גרות בקומה 8 (x=8), ומשלמות 400 ₪ בכל חודש.

הערה: עם תלמידים מתקדמים מומלץ להתחיל לדון בשלב זה במשמעות של " הערך של x שבו שתי הפונקציות שוות" או "הערך של x שבו לפונקציה אחת יש ערך גדול/קטן יותר מאשר לפונקציה אחרת", כדי להכין אותם לנושא של פתרון אי שוויונות בדרך גרפית.

פתרון האתנחתא:

1. מחיר בובה + מחיר מכונית = 40 ₪.
מחיר בובה + מחיר כדור = 45 ₪.
מכאן ניתן להסיק שמחיר הכדור גבוה ב- 5 ₪ ממחיר המכונית.
מחיר מכונית + מחיר כדור = 25 ₪. היות ומחיר הכדור גבוה ב- 5 ₪ ממחיר המכונית, ניתן להסיק שמחירן של שתי מכוניות הוא 20 ₪. כלומר, מחירה של מכונית הוא 10 ₪. מכאן שמחירו של כדור הוא 15 ₪, ומחירה של בובה הוא 30 ₪.
מובן שניתן היה להתחיל משני מקרים אחרים (למשל, כדור+בובה וכדור+מכונית), ולבצע את החישובים בדרך אחרת.



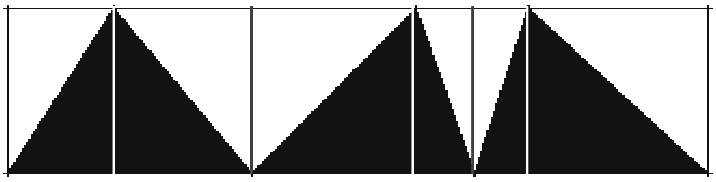
2. להלן אחת האפשרויות לחישוב סכום הזוויות:
זווית 6 היא זווית חיצונית למשולש ABC, ולכן:
$\angle 6 = \angle 3 + \angle 5$
זווית 7 היא זווית חיצונית למשולש DEF, ולכן:
$\angle 7 = \angle 2 + \angle 4$
מכאן נקבל:
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 = \angle 1 + \angle 7 + \angle 6 = 180°$

פתרון אי שוויונות בדרך גרפית

נושא זה מיועד לתלמידים מתקדמים.

מטרתה של **פעילות 1** היא לספק לתלמידים דרך לפתור אי שיוויון קווי בכלים גרפיים.
בסעיף א של הפעילות מוצגת לתלמידים דרך נוספת לרישום שוויון בין שתי פונקציות ($f(x) = g(x)$ עבור $x = 2$), על מנת שניתן יהיה לרשום בצורה נוחה יותר את הפתרונות של אי השיוויון.

בסעיף ב נפגשים התלמידים עם המושג "ערך גדול יותר של פונקציה", ורואים כיצד ניתן לקבוע זאת בעזרת סרגל משולש. ניתן לחזור לתרגיל 14 ולדון במושג זה בהקשר של התרגיל.



פתרון האתנחתא:
נסרטט גבהים של משולשים, כמו בסרטוט שלהלן, ונחלק את המלבן הגדול למלבנים קטנים יותר.
היות ואלכסון של מלבן מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח, הרי שהחלק הכהה והחלק הבהיר שווים בשטחם.

בתרגיל 1 יש התייחסות חוזרת למה שלמדו התלמידים בפעילות 1.

בעזרת **הדוגמה** לומדים התלמידים כיצד לפתור בדרך אלגברית אי שוויון. הרעיון המרכזי הוא שאי שוויון קווי פותרים באופן דומה לזה שבו פותרים משוואות. יש לשים לב לכך שכאשר מחלקים או כופלים במספר שלילי, הסימן של אי השוויון "מתהפך". ניתן להיעזר בדוגמאות מספריות כדי להסביר מדוע זה קורה.
למשל: $2<5$, אבל $-2>-5$.

מטרתו של **הדיון** המופיע לאחר הדוגמה היא להדגיש את העובדה שכשאר מדובר בגרפים של שתי פונקציות קוויות שיש להם נקודת חיתוך, המצב ההדדי בין שתי הפונקציות ($f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$) משתנה "מימין" ו"משמאל" לנקודה זו. היות ולשני קווים ישרים שאינם מתלכדים יכולה להיות לכל היותר נקודת חיתוך אחת, הרי שלמרות שלא ניתן לראות בסרטוט מה קורה עבור $x = 8$ ו- $x = -5$, ניתן לדעת בבטחה האם בנקודות אלה $f(x) > g(x)$ או $f(x) < g(x)$.

בתרגילים 2-4 התלמידים מתרגלים פתרון של אי שוויון בכלים גרפיים ובכלים אלגבריים. בתרגילים 2 ו-3, כדי לפתור את אי השיוויון בכלים גרפיים, עליהם להתאים תחילה בין הגרף לבין הפונקציה המתאימה. בתרגיל 4 עליהם להיעזר בגרפים שסרטטו בפעילות 4.

תרגיל 2. שיעור ה-x של נקודת החיתוך הוא $x=-1$. לכן, $f(x) > g(x)$ עבור $x<-1$, ו- $f(x)<g(x)$ עבור $x>-1$.

תרגיל 3. שיעור ה-x של נקודת החיתוך הוא $x=3$. לכן, $k(x) > m(x)$ עבור $x<3$, ו- $k(x)<m(x)$ עבור $x>3$.

מטרתו של **תרגיל 5** הוא להראות לתלמידים שכאשר הגרפים של שתי הפונקציות הקוויות הם ישרים מקבילים, אין שינוי במצב ההדדי של הגרפים הללו (היות ואין להם נקודת חיתוך). לכן, בסעיף א $f(x)>g(x)$ עבור כל x, ובסעיף ב $s(x) < t(x)$ עבור כל x.

ניתן לראות זאת גם באופן אלגברי:

בסעיף א, הפתרון של $2x + 2 > 2x - 5$ (כלומר, $2 > -5$) הוא כל x, ולעומת זאת לאי השוויון $2x + 2 < 2x - 5$ (כלומר, $2 < -5$) אין פתרון. ובאופן דומה ניתן להראות זאת עבור סעיף ב.

בתרגיל 6 רואים שכאשר הגרפים של שתי הפונקציות מתלכדים (כלומר- למשוואה הבנוייה משתי הפונקציות הללו יש אינסוף פתרונות), אין ערכים של x שעבורם מתקיים אחד מאי השוויונות הנתונים. המשמעות האלגברית שיש לכך, היא פתרון אי השוויון $3x - 3 > 3x – 3$ או אי השוויון $3x - 3 < 3x – 3$. גם מתוך הייצוג האלגברי ניתן לראות שאין פתרון לאף אחד מאי השוויונות הללו.

ניתן לסכם ולומר את הדברים הבאים:

אם למשוואה הקווית $f(x) = g(x)$ יש פתרון, אז יש פתרון לאי השוויון $f(x) > g(x)$ וגם לאי השוויון $f(x) < g(x)$.

אם למשוואה הקווית $f(x) = g(x)$ אין פתרון, אז יש פתרון **רק לאחד** מאי השוויונות הבאים: $f(x) > g(x)$ או $f(x) < g(x)$.

אם למשוואה הקווית $f(x) = g(x)$ יש אינסוף פתרונות, אז אין פתרון לאי השוויון $f(x) > g(x)$ וגם אין פתרון לאי השוויון $f(x) < g(x)$.

פתרון האתנחתא:

בכל יום, למעט היום האחרון, הזחל מתקדם ב- 6 מ'. כלומר, את 36 = 48-12 המטרים הראשונים הוא עובר במשך 6 ימים. ביום השביעי הוא מטפס 12 מ', ומכיוון שהוא מצליח לצאת מהבאר הוא אינו מחליק חזרה במהלך הלילה. סה"כ הזחל זקוק ל- 7 ימים כדי לצאת מהבאר.